# МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)**

# Кафедра МОЭВМ

# ОТЧЕТ

**по лабораторной работе №3**

# по дисциплине «Элементы функционального анализа»

# Тема: Мера и интеграл

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студентка гр. 1384 |  | Усачева Д. В. |
| Преподаватель |  | Коточигов А.М. |

Санкт-Петербург

2024

# Задание.

# Вариант 41

# Основные теоретические положения.

Предположим, что на всех подмножествах Е отрезка [0,1] задана мера m, обладающая следующими свойствами:

1. для любых непересекающихся множеств, , выполнено
2. *Счетно-аддитивная мера* на отрезке [0,1] порождена функцией :

(a) если , то

(b)

Вещественная функция f, заданная на отрезке , называется *измеримой*, если для любого вещественного числа измеримо множество

*Интеграл Лебега.* от простой функции по отрезку называется , если ряд сходится

Поскольку нет никакого естественного порядка для нумерации множеств , любую измеримую функцию можно представить, как разность двух положительных измеримых функций , где , когда , когда

, когда , когда

Функция f называется интегрируемой по Лебегу, если существуют последовательность измеримых простых функций таких, что и предел , где число I называют интегралом Лебега

Интеграл по любому измеримому множеству А определяется равенством:

где при при

# Выполнение работы.

1. Вычислить 𝑘1, 𝑘2, 𝑘3, 𝑘4. Нарисовать график.

Из функции

На интервале ), функция постоянна

На интервале функция задается как , в крайних точках она равна и .

Построенный график см. рис. 1.

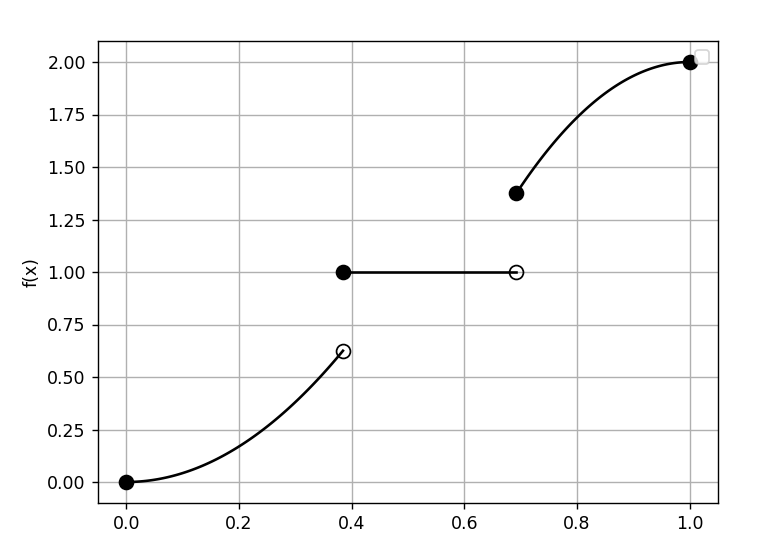


Рисунок 1 – График функции

1. Положим . Показать, что .

Для начала вычислим

Тогда

Проводя аналогичные вычисления, получим

1. Вычислить , где непрерывная на функция, линейная на отрезках и заданная в точках излома .

Чтобы вычислить интеграл достаточно разбить отрезок точками, где либо имеет разрыв функция , либо имеет излом функция и подсчитать «интеграл» в точках разрыва.

Интегралы по интервалам, где функция и дифференцируемы сводятся к интегралу Римана, как и при вычислении меры , интеграл по точке вычисляется через предел

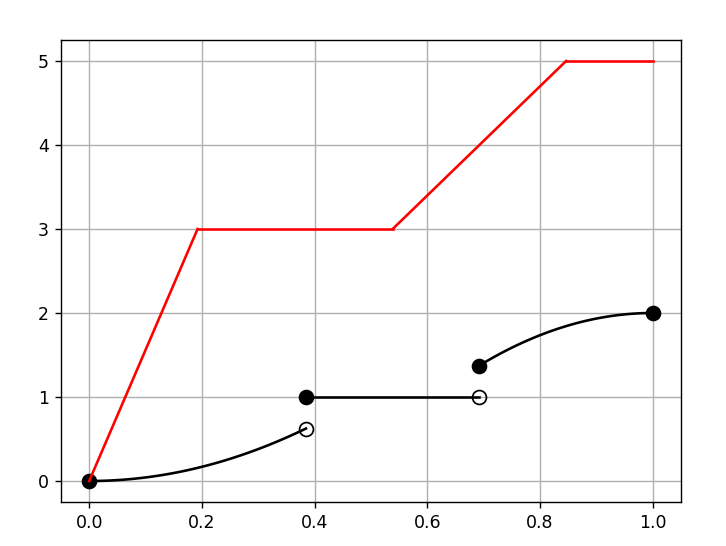


Рисунок 2 – График функций

Итог:

* Для 0 ≤ x ≤ 5/26: g(x)= 78/5 \* x
* Для 5/26 <x ≤ 7/13: g(x) = 3
* Для 7/13 <x ≤ 11/13: g(x) = 26x - 23/13
* Для 11/13 <x ≤ 1: g(x) = 5
* Для 0 ≤ x ≤ 5/13: f(x) = 4.225 \* x\*\*2
* Для 5/13 <x ≤ 9/13: f(x) = 1
* Для 9/13 <x ≤ 1: f(x) = 2 - 845/128 \* (1 - x)

1. Вычислить норму в пространстве

Будем вычислять , из чего далее возьмём корень. Точки разбиения интеграла, будут теми же, что и в задании 3.

Сложим интегралы выше:

1. Существует ли линейная функция ортогональная функции в пространстве

.

Вычисление будет производиться тем же методом, разбивая отрезок интегрирования на те же участки, что были ранее.

Просуммировав значения данных интегралов, получим значение

Имеем

Так, линейная функция ортогональна функции в при любом .